Correction TD - M5

Exercices à maîtriser

Ex. n°1 • Chambre à bulles ★☆☆ 2664

1) Les particules subissent une force de frottement fluide qui amorti leur mouvement, d'où le mouvement spiralaire. Ces spirales sont donc parcourues de l'extérieur vers l'intérieur.

2) Il faut raisonner avec le sens de la force de Lorentz magnétique : $\overrightarrow{F} = q\,\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}$. Ligne droite : non chargée. Sens trigonométrique : charge $q < 0$. Sens horaire : $q > 0$.

3) Pour différentier deux particules de charge de même signe, il faut regarder le rayon du cercle :

$$R = \frac{mv_0}{|q|\,B}$$

qui dépend de m et de $|q|$.

Ex. n°2 • Microscope électronique ★☆☆ 1823

1) On applique le TEM sur l'électron entre l'anode et la cathode, dans le référentiel du microscope supposé galiléen.

$$\Delta\mathcal{E}_m = 0 = \frac{1}{2}mv^2 - eU \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}}$$

2) La longueur d'onde de de Broglie vaut :

$$\boxed{\lambda_{\mathrm{DB}} = \frac{h}{mv} = \frac{h}{\sqrt{2emU}} = 54\ \mathrm{pm}}$$

Cette longueur d'onde est 10 000 fois plus petite que de la lumière visible. Un microscope électronique permet donc d'imager des objets 10 000 fois plus petit qu'un microscope optique car il repousse les limites de la diffraction d'un facteur 10 000.

Ex. n°3 • Sélecteur de vitesse ★☆☆ 8398

1) La particule est soumise uniquement à la force de Lorentz. Le vecteur vitesse de la particule reste inchangé ($\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}_0$) si son vecteur accélération est nul, c'est-à-dire d'après le PFD si la force de Lorentz est nulle.

$$\overrightarrow{F}_L = \overrightarrow{0} = q\left(\overrightarrow{E} + \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}\right)$$

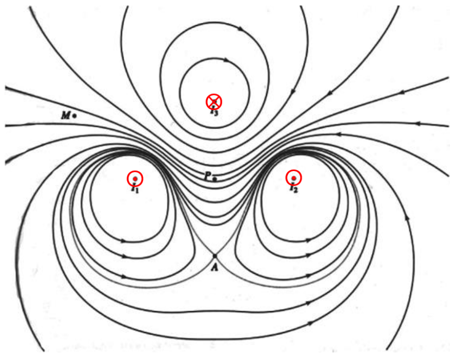
Ce qui donne :

$$\overrightarrow{0} = q\left(E_0 - v_0B_0\right)\overrightarrow{u}_y \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_0 = \frac{E_0}{B_0}}$$

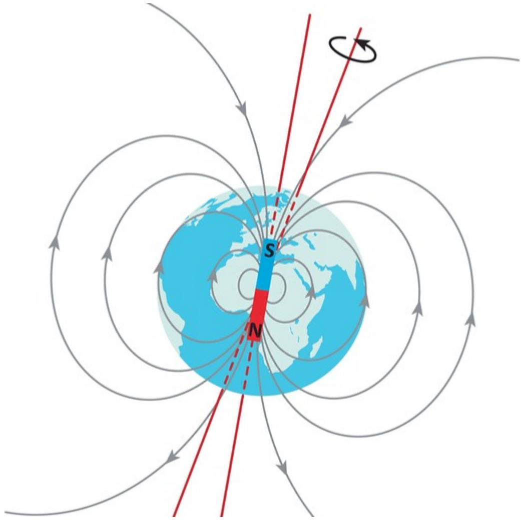
2) On peut utiliser la contraposée de la question précédente : si le vecteur vitesse de la particule n'est pas égal à $\overrightarrow{v}_0 = \frac{E_0}{B_0}\overrightarrow{u}_x$ alors elle est déviée. En plaçant par exemple un masque en sortie de la zone de champ, on peut ne garder que les particules passant par un trou accessible seulement si elles ont la vitesse $\overrightarrow{v}_0$ et bloquer les autres.

Ex. n°4 • Cartes de champ magnétique ★⯪☆ 9911

1)



2)



Le pôle Nord magnétique est proche de pôle Sud géographique et vice-versa.

Ex. n°5 • Spectromètre de masse ★★☆ 1743

1) Le théorème de l'énergie mécanique entre S et O assure que :

$$0 = \Delta\mathcal{E}_m = \Delta\mathcal{E}_c + \Delta\mathcal{E}_p = \frac{1}{2}mv_0^2 + q\underbrace{(V_\mathrm{O} - V_\mathrm{S})}_{=\,-U} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_0 = \sqrt{\frac{2qU}{m}}}$$

2) Dans la champ, seule la force magnétique de Lorentz s'applique. Or, le théorème de la puissance cinétique donne :

$$\frac{d\mathcal{E}_c}{dt} = \mathcal{P}\left(\overrightarrow{F}_L\right) = \left(q\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}\right) \cdot \overrightarrow{v} = 0$$

Donc l'énergie cinétique se conserve, donc la norme de la vitesse (v_0) se conserve.

3) On admet que la trajectoire circulaire. On a démontré à la question précédente qu'elle est également uniforme. Ainsi, soit O′ le centre de la trajectoire

$$\begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{O'M}} = R\overrightarrow{u_r} \\ \overrightarrow{v} = R\omega\overrightarrow{u_\theta} = v_0\overrightarrow{u_\theta} \\ \overrightarrow{a} = -R\omega^2\overrightarrow{u_r} = -\dfrac{v_0^2}{R}\overrightarrow{u_r} \end{cases}$$

Le PFD donne :

$$m\overrightarrow{a} = q\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B} \quad \Rightarrow \quad -m\frac{v_0^2}{R} = -qv_0B \quad \Rightarrow \quad \boxed{R = \frac{mv_0}{qB} = \sqrt{\frac{2mU}{qB^2}}}$$

4) L'hydrogène possède une masse $m_\mathrm{H} = m_n$ et le deutérium $m_\mathrm{D} = 2m_n$. On en déduit la distance OP qui est le diamètre du cercle :

$$\mathrm{OP} = 2R = \sqrt{\frac{8mU}{qB^2}} = \begin{cases} 14{,}4\ \text{cm} \ \text{ pour } \mathrm{H}^+ \\ 20{,}4\ \text{cm} \ \text{ pour } \mathrm{D}^+ \end{cases}$$

Pour aller plus loin

Ex. n°6 • Expérience de Rutherford ★★☆ 3831

Le noyau d'or est supposé immobile au centre un repère sphérique. Il possède une charge $Q = Ze$. Il crée un potentiel électrostatique :

$$\overrightarrow{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\overrightarrow{u_r} \quad \Rightarrow \quad V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ze}{r}$$

On applique le TEM à la particule α de charge $q = 2e$ entre A (situé à l'infini) et B.

$$\Delta\mathcal{E}_m = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E}_m(\mathrm{A}) = \mathcal{E}_m(\mathrm{B}) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E}_0 + qV(\infty) = 0 + qV(d)$$

On en déduit :

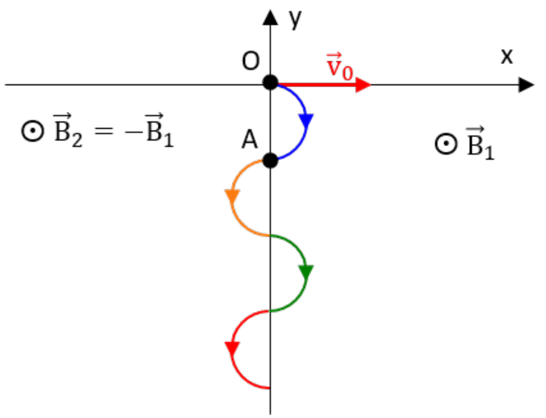
$$\mathcal{E}_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2Ze^2}{d} \quad \Rightarrow \quad \boxed{d = \frac{2Ze^2}{4\pi\varepsilon_0\mathcal{E}_0} = 23 \times 10^{-15}\ \mathrm{m} = 23\ \mathrm{fm}}$$

Ex. n°7 • Action de deux champs magnétiques successifs ★★☆ 7522

1) La particule chargée évolue dans un champ magnétique où $\overrightarrow{v_0} \perp \overrightarrow{B}$. Le mouvement est donc dans le plan (Oxy). Il s'agit d'un mouvement circulaire de rayon :

$$R = \frac{mv_0}{qB_0}$$

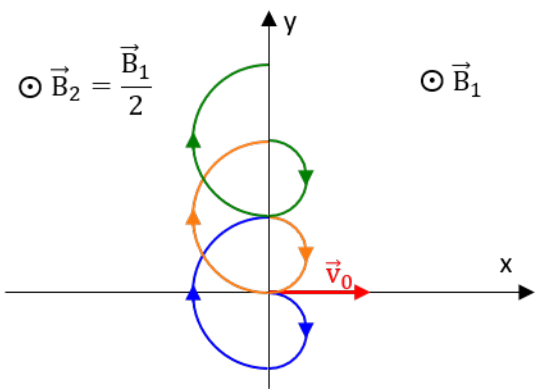
Le sens de parcourt du cercle dépend du sens du champ magnétique, donc du demi-espacé considéré. La trajectoire est ainsi :



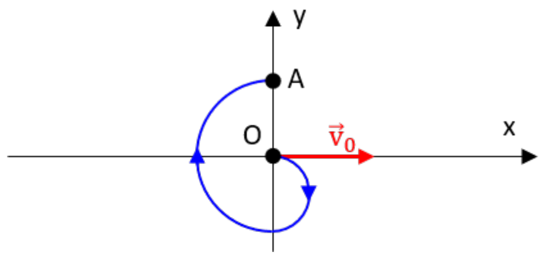
2) Notons $\vec{v} = v_x \vec{u}_x + v_y \vec{u}_y$ la vitesse de la particule. Il est évident graphique que que $\langle v_x \rangle = 0$ puisque la trajectoire reste centrée autour de l'axe y. Ainsi, $\langle \vec{v} \rangle = \langle v_y \rangle \vec{u}_y$. La vitesse moyenne de la particule correspond donc à la vitesse d'un particule fictive qui irait de O vers A en ligne droite, en un temps égal à celui de la particule réel.

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{t_{\mathrm{OA}}} = -\frac{2R}{\pi R/v_0} \vec{u}_y = \boxed{-\frac{2v_0}{\pi} \vec{u}_y}$$

3) Nature de la trajectoire :



Calculons la vitesse moyenne de la particule, c'est-à-dire (avec le même raisonnement) la vitesse moyenne sur la trajectoire bleue.



Sur le trajet bleu (demi-cercle de rayon R et demi-cercle de rayon $2R$) :

$$\ell_{\mathrm{OA}} = v_0\ t_{\mathrm{OA}} = \pi R + \pi\ 2R = 3\pi R$$

On en déduit la vitesse moyenne de la particule :

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{t_{\mathrm{OA}}} = \frac{2R}{3\pi R/v_0} \vec{u}_y = \boxed{\frac{2v_0}{3\pi} \vec{u}_y}$$

Ex. n°8 • Trajectoire dans un champ magnétique uniforme ★★☆ 8237

1) On applique le PFD :

$$m \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = q \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_0 \end{pmatrix} = q \begin{pmatrix} \dot{y} B_0 \\ -\dot{x} B_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit :
$$\boxed{\ddot{x} = \omega_c \dot{y} \qquad \ddot{y} = -\omega_c \dot{x} \qquad \ddot{z} = 0}$$

2) On a :
$$\underline{\ddot{u}} = \ddot{x} + i\ \ddot{y} = \omega_c \dot{y} - i\omega_c \dot{x} = -i\omega_c \left(\dot{x} + i\dot{y}\right) = -i\omega_c \underline{\dot{u}}$$

On en déduit l'équation différentielle vérifiée par $\underline{\dot{u}}$:

$$\boxed{\frac{d\underline{\dot{u}}}{dt} + i\omega_c\ \underline{\dot{u}} = 0}$$

3) La solution est :
$$\boxed{\underline{\dot{u}}(t) = (a + ib)\ e^{-i\omega_c t}}$$

En prenant les parties réelles et imaginaires, il vient :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \mathcal{R}e\left(\underline{\dot{u}}(t)\right) = a\ \cos(\omega_c t) + b\ \sin(\omega_c t) \\ \dot{y}(t) = \mathcal{I}m\left(\underline{\dot{u}}(t)\right) = -a\ \sin(\omega_c t) + b\ \cos(\omega_c t) \end{cases}$$

Avec les conditions initiales, il vient :

$$\begin{cases} \dot{x}(0) = v_0 = a \\ \\ \dot{y}(0) = 0 = b \end{cases}$$

On en déduit :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = v_0\ \cos(\omega_c t) \\ \dot{y}(t) = -v_0\ \sin(\omega_c t) \end{cases}$$

Ex. n°9 • Expérience de J. J. Thomson (1897) ★★★ 2877

1) Lorsque $0 \leq x \leq a$, on étudie une particule chargée dans un champ électrique uniforme. La trajectoire est donc une **parabole**. Lorsque $x \geq a$, le champ électrique est nul. La particule n'est donc soumise à aucune force. La trajectoire est **rectiligne**.

On applique le PFD dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen. La particule est soumise uniquement à la force de Lorentz (électrique uniquement car $\overrightarrow{B} = \overrightarrow{0}$).

$$\begin{cases} m\ddot{x} = 0 \\ m\ddot{y} = eE \\ m\ddot{z} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = v_0 \\ \dot{y} = eE\ t \\ \dot{z} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = v_0\ t \\ y = \dfrac{eE}{2}\ t^2 \\ z = 0 \end{cases}$$

On en déduit la nature de la trajectoire :

$$\boxed{y(x) = \frac{eE}{2mv_0^2}\ x^2}$$

Ainsi, le point M a pour ordonnée :

$$\boxed{y_\mathrm{M} = \frac{eEa^2}{2mv_0^2}}$$

2) La trajectoire rectiligne a pour équation : $y_2 = y'(a) \times x + b$. En effet, la pente de cette droite est donnée par la dérivée de la trajectoire parabolique en $x = a$.

$$y'(x) = \frac{eE}{mv_0^2}\ x \quad \Rightarrow \quad y'(a) = \frac{eEa}{mv_0^2}$$

De plus, la trajectoire rectiligne passe par le point M lorsque $x = a$. On en déduit :

$$\frac{eEa^2}{2mv_0^2} = \frac{eEa^2}{mv_0^2} + b \quad \Rightarrow \quad b = -\frac{eEa^2}{2mv_0^2}$$

L'équation de la trajectoire rectiligne est donc :

$$\boxed{y_2(x) = \frac{eEa}{mv_0^2}\left(x - \frac{a}{2}\right)}$$

Or, le point I est le point de cette droite où $y_2 = 0$. On en déduit $\boxed{x_\mathrm{I} = a/2}$. Le point I est bien le milieu de OA.

On en déduit la valeur de Y. Dans les triangles IMA et IPH, on a :

$$\sin(\alpha) = \frac{y_\mathrm{M}}{a/2} = \frac{Y}{D} \quad \Rightarrow \quad \boxed{Y = \frac{eEaD}{mv_0^2}}$$

3) On applique le PFD dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen. La particule est soumise uniquement à la force de Lorentz : $\overrightarrow{F} = -e\left(\overrightarrow{E}\,\overrightarrow{v} + \wedge\overrightarrow{B}\right)$. Ainsi,

$$\begin{cases} m\ddot{x} = eB\dot{y} \\ m\ddot{y} = e\left(E - B\dot{x}\right) \\ m\ddot{z} = 0 \end{cases}$$

Dans cette expérience, on souhaite que $y(t) = 0$ durant toute la durée de l'expérience. Ceci implique que :

$$\begin{cases} \dot{y} = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\dot{x} = cte = v_0} \\ \\ \ddot{y} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{E - B\dot{x} = 0} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_0 = \frac{E}{B}}$$

4) On revient dans l'expérience n°1. Thomson mesure la déviation :

$$Y = \frac{eEaD}{mv_0^2} = \frac{eaDB^2}{mE} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{e}{m} = \frac{YE}{aDB^2}}$$

Il contrôle E et B et peut mesurer a, D et Y. Il en déduit ainsi la valeur de $\dfrac{e}{m}$.

5) L'incertitude-type sur $\dfrac{e}{m}$ vaut (formule du produit) :

$$u\left(\frac{e}{m}\right) = \frac{e}{m}\sqrt{\left(\frac{u(Y)}{Y}\right)^2 + \left(\frac{u(E)}{E}\right)^2 + \left(\frac{u(a)}{a}\right)^2 + \left(\frac{u(D)}{D}\right)^2 + 2\left(\frac{u(B)}{B}\right)^2}$$

Toutes les incertitudes $u(Y)$, $u(E)$, $u(a)$, $u(D)$ et $u(B)$ sont constantes et fixées par ses instruments de mesures. Il faut donc augmenter D, ce qui va également augmenter Y, et ainsi rendre négligeable les incertitudes relatives suivantes :

$$\frac{u(Y)}{Y} \to 0 \quad \text{et} \quad \frac{u(D)}{D} \to 0$$

et donc diminuer l'incertitude de la mesure de e/m.

Pour s'entraîner au DS

Ex. n°10 • Cyclotron ★★☆ 4602

1) Dans un dé, le proton n'est plongé que dans un champ magnétique uniforme. Il est donc soumis à la force : $\vec{F} = e\vec{v} \wedge \vec{B}$. Cette force est orthogonale à $\vec{v}$ et donc ne travail pas. L'énergie cinétique et par conséquent la norme de la vitesse sont donc constantes.

2) À l'entrée du dé, $\vec{v} \perp \vec{B}$. Le mouvement est donc circulaire uniforme.

3) Accélération dans le repère de Frenet :

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{u}_T + \frac{v^2}{R}\vec{u}_N$$

Or, un champ magnétique ne peut pas changer la norme de la vitesse, donc $\|\vec{v}\| = v = cte$. Ainsi,

$$\vec{a} = \frac{v^2}{R}\vec{u}_N = \frac{e}{m}\vec{v} \wedge \vec{B} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{v^2\ \|\vec{u}_N\|}{\frac{e}{m}\left\|\vec{v} \wedge \vec{B}\right\|} = \boxed{\frac{mv}{eB}}$$

4) Lors d'un demi-tour dans un dé, le proton parcourt une distance $d = \pi R$ à la vitesse v. Cela dure le temps :

$$\boxed{T_{1/2} = \frac{d}{v} = \frac{\pi m}{eB} = 32{,}7 \text{ ns}}$$

Ce temps est indépendant de la vitesse du proton.

5) On considère que le temps de passage entre les deux dés est instantané. Pour que le champ $\vec{E}$ accélère au mieux les protons, il faut qu'il soit maximal (maximal en valeur absolue et > 0) lorsque le proton traverse la région centrale de gauche à droite ; et minimal (maximal en valeur absolue et < 0) lorsque le proton traverse la région centrale de droite à gauche.

Il faut donc que la période soit égale à $T_c = 2 \times T_{1/2}$. On en déduit la fréquence :

$$\boxed{f_c = \frac{1}{T_c} = \frac{eB}{2\pi m} = 15{,}3 \text{ MHz}}$$

6) On se place dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen. Le TEC appliqué entre l'entrée et la sortie de la zone centrale donne :

$$\boxed{\Delta\mathcal{E}_c = eU_m = 2{,}5 \text{ keV} = 4{,}0 \times 10^{-16} \text{ J}}$$

7) On part avec une énergie cinétique nulle et on souhaite atteindre une énergie :

$$\mathcal{E}_{c,f} = \frac{1}{2}mv_f^2 = 3{,}25 \text{ MeV}$$

Il faut donc que le proton passe par la zone centrale $N_{1/2}$ fois, avec :

$$N_{1/2} = \frac{\mathcal{E}_{c,f}}{\Delta\mathcal{E}_c} = 1300$$

Or, le proton passe 2 fois par la zone centrale en 1 tour. Il doit donc réaliser :

$$\boxed{N = \frac{N_{1/2}}{2} = 650 \text{ tours}}$$

8) Le rayon du dernier tour vaut :

$$\boxed{R_f = \frac{mv_f}{eB} = 26 \text{ cm}}$$

Il est donc possible de construire des accélérateurs de particules dont le diamètre est inférieur au mètre, ce qui est tout à fait raisonnable pour un hôpital par exemple.